

На правах рукописи

Кадырова Альфия Шамилевна

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ  
КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ НА ОСНОВЕ ДВУХШАГОВЫХ  
МЕТОДОВ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ НЕВЯЗКИ

05.13.18 - математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Казань – 2010

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте механики и машиностроения Казанского научного центра РАН

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
Мазуров Петр Алексеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Лапин Александр Васильевич

доктор физико-математических наук,  
Шешуков Евгений Геннадьевич

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук  
Институт прикладной математики  
им. М.В. Келдыша РАН (г. Москва)

Защита состоится «08» апреля 2010 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлёвская, 18, корп. 2, ауд. 218.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан «05» марта 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета  
Д 212.081.21

д.ф.-м.н.

Задворнов О.А.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В настоящее время геолого-гидродинамическое моделирование пластовых систем является основным инструментом для прогнозирования разработки и эксплуатации месторождений подземных вод. Задача идентификации коэффициента фильтрации возникает на этапе адаптации геолого-гидродинамической модели изучаемого объекта по имеющимся данным. Стандартным методом идентификации коэффициента фильтрации водоносного пласта является определение его значений из минимума функции невязки, представляющей собой сумму квадратов разностей между известными значениями напора в наблюдательных точках пласта и вычисленными значениями напора в соответствующих точках модели. Задачу минимизации функции невязки приходится решать многократно, что требует больших вычислительных затрат. Разработка методов минимизации, сокращающих вычислительные затраты, является важной актуальной задачей.

### **Цели диссертационной работы:**

- построение эффективных методов минимизации функции невязки;
- разработка на основе предложенных методов численных алгоритмов решения задач идентификации коэффициента фильтрации водоносных пластов.

### **Научная новизна результатов.**

В диссертации разработаны численные алгоритмы для решения задач идентификации коэффициента фильтрации напорного пласта по замерам напора в наблюдательных точках. Задача идентификации коэффициента фильтрации относится к классу некорректно поставленных задач. Учёт различного рода априорной информации о значениях идентифицируемых параметров является одним из регуляризирующих элементов, повышающим устойчивость и достоверность решения задачи. Предложенные численные алгоритмы разработаны на основе новых двухшаговых методов минимизации функции невязки с учётом и без учёта сравнительной априорной информации о значениях идентифицируемых параметров.

При построении и анализе двухшаговых методов минимизации используется понятие запаса чувствительности. В двухшаговых методах первый шаг каждой итерации проводится по алгоритмам классических методов, но допускается увеличение функции невязки за счёт её увеличения в главной системе координат в направлениях с большими сингулярными числами. Итоговые же значения функции невязки на итерациях, как и в классических методах, образуют убывающую последовательность.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается корректным применением методов вычислительной математики и математических моделей механики сплошной среды, сравнением полученных решений с известными решениями тестовых и модельных задач.

**Практическая ценность.** Разработанные двухшаговые методы могут быть использованы для решения систем нелинейных уравнений и в задачах ми-

нимизации функции невязки. Эти методы позволяют существенно сократить вычислительные затраты и тем самым ускорить процесс решения задачи. Вычислительные алгоритмы, построенные на основе двухшаговых методов, могут использоваться для решения задачи идентификации коэффициента фильтрации, возникающей на этапе адаптации геолого-гидродинамической модели разрабатываемых месторождений подземных вод, нефтяных и газовых месторождений.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на: XI международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2001, Москва-Истра, 2001); IV научно-практической конференции молодых ученых и специалистов Республики Татарстан (Казань, 2001); международной конференции ModelCARE 2002, 4<sup>th</sup> International Conference "Calibration and Reliability in Groundwater Modelling" (Prague, 2002); VIII Четаевской международной конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением" (Казань, 2002); II Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» (Москва, 2003); Всероссийской конференции "Высокопроизводительные вычисления и технологии (ВВТ-2003)" (Ижевск, 2003); XIII Всероссийской конференции-школе «Современные проблемы математического моделирования» (Абрау-Дюрсо, 2009); региональной научно-практической конференции «Актуальные вопросы геолого-гидродинамического моделирования и переоценки нефтяных ресурсов Республики Татарстан» (Казань, 2009); итоговых научных конференциях КазНЦ РАН; семинарах Института механики и машиностроения КазНЦ РАН.

**Структура диссертационной работы.** Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 150 страниц, включая 26 таблиц и 46 рисунков.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 12 работ, список которых приведен в конце автореферата. Во всех работах автор принимал непосредственное участие на всех этапах исследований. Непосредственно автору принадлежит построение двухшаговых методов минимизации функции невязки, разработка численных двухшаговых алгоритмов минимизации для решения задач идентификации коэффициента фильтрации.

## СТРУКТУРА И КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается обзор литературы, формулируются цели исследования и положения, выносимые на защиту.

В **первом разделе** дана постановка нелинейной задачи о наименьших квадратах. Приведены результаты поиска минимума тестовых функций стандартными методами безусловной минимизации. Для анализа существующих и построения новых методов минимизации функции невязки введены понятия запасов чувствительности переменной минимизации и функции невязки. На основе методов Ньютона и Гаусса-Ньютона минимизации функции невязки по-

строены двухшаговые методы Ньютона и Гаусса-Ньютона. В основе двухшаговых методов лежит идея обхода изгибов дна оврага при минимизации овражных функций. На каждой итерации двухшаговых методов в случае, когда текущая точка расположена вблизи дна оврага, первый шаг делается достаточно большим вдоль дна оврага. При изменении направления дна оврага первый шаг приводит к подъёму на его склон (значение функции невязки увеличивается), а второй шаг к спуску ко дну оврага (значение функции невязки уменьшается по сравнению с началом итерации). Проведение таких двух шагов позволяет обойти изгибы дна оврага и тем самым ускорить процесс минимизации.

В п.1.1 рассмотрена нелинейная задача о наименьших квадратах

$$\min_{x \in R^n} J(x) = \min_{x \in R^n} \frac{1}{2} R^T R = \min_{x \in R^n} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i^2,$$

где  $J(x)$  - функция невязки,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  - вектор переменных минимизации,  $R = (r_1, \dots, r_m)^T$  - вектор невязки,  $r_i = r_i(x)$  - нелинейные функции,  $n$  - число переменных минимизации,  $m$  - число невязок. Приведены ньютоновские и квазиньютоновские методы минимизации функции невязки: Ньютона и Гаусса-Ньютона без поиска и с поиском шага, Давидона-Флетчера-Пауэлла, Бройдена-Флетчера-Голдфарба-Шэнно, Левенберга-Марквардта.

В методе Левенберга-Марквардта новые значения переменных минимизации на  $k$ -ой итерации вычисляются по формуле  $x^k = x^{k-1} + d^k$ , где  $d^k = -(H^k + \mu_k E)^{-1} g^k$ ,  $H^k$  - приближённая матрица вторых производных,  $H^k = A^T A$ ,  $A = \{\partial r_i / \partial x_j\}$  - матрица чувствительности,  $\mu_k \geq 0$  - параметр Марквардта,  $E$  - единичная матрица,  $g^k$  - градиент функции невязки (вектор чувствительности). Различные модификации метода Левенберга-Марквардта отличаются стратегией изменения параметра  $\mu_k$  в процессе минимизации. В работе использовались три варианта метода Левенберга-Марквардта. В первом варианте на первой итерации  $\mu_1$  берётся на порядок больше максимального собственного числа матрицы  $H^1$ . На каждой итерации проверяется условие убывания функции невязки  $J(x^k) < J(x^{k-1})$ , и в случае его нарушения параметр Марквардта увеличивается в два раза до тех пор, пока это условие не выполнится. При переходе к следующей итерации параметр Марквардта уменьшается в два раза. Во втором варианте в начале каждой итерации  $\mu_k = 0$ . Если условие убывания функции невязки нарушается, то  $\mu_k$  меняется по формуле  $\mu_k = 1.5\mu_k + 0.001$  до тех пор, пока это условие не выполнится. В третьем варианте на каждой итерации  $\mu_k$  определяется из условия минимума функции невязки.

Для остановки процесса минимизации в работе использовались два критерия: 1)  $J(x^{k-1}) - J(x^k) < 0.01J(x^{k-1})$  в течение трёх итераций (медленная схо-

димось итерационного процесса); 2)  $r_{\max} = \max_j |r_j(x)| < 10^{-6}$  (достижение заданной точности по невязкам).

Проведено сравнение приведённых методов при минимизации тестовых функций (квадратичная функция простой структуры, функция Розенброка, двумерная экспоненциальная функция, функции Биля, Зангвилла и Пауэлла).

В п.1.2 введены понятия запасов чувствительности переменной минимизации и функции невязки. Запас чувствительности  $i$ -ой переменной минимизации определяется как величина  $P_i = -d_i^{GN} g_i$ , где  $d_i^{GN}$  и  $g_i$  - компоненты вектора спуска Гаусса-Ньютона  $d^{GN}$  и вектора чувствительности  $g$ . Вектор спуска Гаусса-Ньютона находится из решения системы  $Hd^{GN} = -g$ . Запас чувствительности функции невязки определяется как сумма запасов чувствительности всех переменных минимизации. При  $n = m$  запас чувствительности функции невязки равен квадрату вектора невязки, а при  $n \leq m$  его не превосходит. В пространстве переменных минимизации с помощью сингулярного разложения матрицы  $H = V\Sigma V^T$  введена главная система координат, где  $V$  - ортогональная матрица,  $\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  - диагональная матрица,  $\sigma_i$  - сингулярные числа,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ . В главной системе координат запас чувствительности в  $i$ -м направлении  $P_{V_i} = (d_{V_i}^{GN})^2 \sigma_i$  является неотрицательной величиной и характеризует потенциальную возможность минимизации функции невязки в данном направлении ( $d_{V_i}^{GN}$  - компоненты вектора  $d_V^{GN} = V^T d^{GN}$ ). Величина запаса чувствительности функции невязки не меняется при переходе к главной системе координат пространства переменных минимизации.

В п.1.3 приведен алгоритм сингулярного разложения симметрической матрицы (SVD - разложение). С использованием преобразований Хаусхолдера матрица приводится к трёхдиагональному виду. Затем строится итерационный процесс QR-итераций со сдвигом Уилкинсона для преобразования трёхдиагональной матрицы к диагональному виду.

В п.1.4 с использованием понятия запаса чувствительности проведён анализ метода Гаусса-Ньютона при минимизации функции Розенброка  $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ . Линии уровня функции Розенброка имеют овальную структуру, дно овала расположено вдоль параболы  $x_2 = x_1^2$ . В начальной точке  $P_0(-1;1)$ , расположенной на дне овала, запас чувствительности в главной системе координат в направлении первой оси  $P_{V_1} = 0.0064$  мал по сравнению с запасом в направлении второй оси  $P_{V_2} = 3.9936$ . Направление вдоль первой оси, соответствующей большему сингулярному числу  $\sigma_1 = 676.85$ , является направлением спуска ко дну овала, а направление вдоль второй оси, соответствующей меньшему сингулярному числу  $\sigma_2 = 0.15$ , является смещением вдоль склона овала. Значение функции Розенброка в начальной точке  $f(P_0) = 4$ . Смещение переменных по направлению Гаусса-Ньютона с единич-

ным шагом вследствие изгиба дна оврага привело в точку  $P_1(1;-3)$  на склоне оврага (рис.1, слева). Значение функции Розенброка  $f(P_1)=1600$  выросло по сравнению со значением в начальной точке, запас чувствительности в направлении первой оси увеличился  $P_{V_1}=1597.44$ , а в направлении второй оси уменьшился  $P_{V_2}=2.56$ . По классическому методу Гаусса-Ньютона переход из точки  $P_0$  в точку  $P_1$  невозможен,  $f(P_1) > f(P_0)$ . Смещение из точки  $P_1$  по направлению Гаусса-Ньютона с единичным шагом привело в точку минимума  $P_m(1;1)$  (рис.1, справа), где  $P_{V_1}=P_{V_2}=0$  и  $f(P_m)=0$ . Таким образом, подъём на склон оврага и спуск позволили обойти изгиб дна оврага и прийти в точку минимума. Распределение запаса чувствительности по направлениям в главной системе координат адекватно описывает положение точки относительно дна оврага, что далее использовано для оценки положения текущей точки при минимизации функций с большим числом переменных без построения поверхностей уровня.

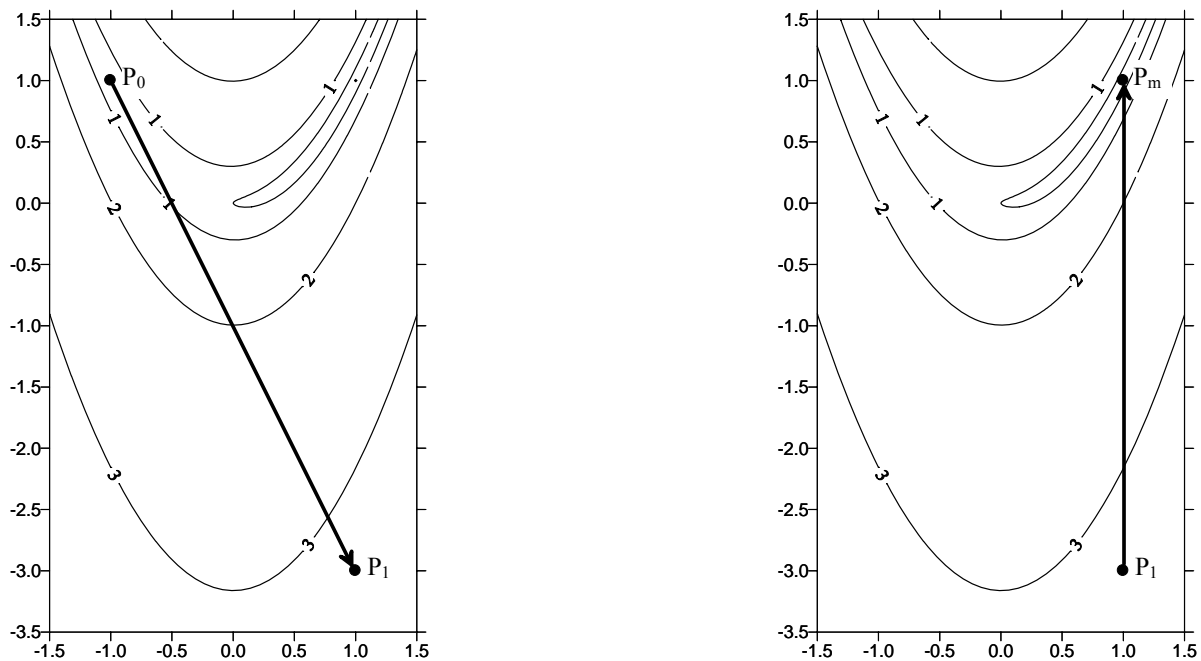


Рис.1. Направления Гаусса-Ньютона функции Розенброка (слева – в точке  $P_0(-1;1)$ , справа - в точке  $P_1(1;-3)$ ). Линии уровня построены по логарифмам значений функции.

На основе проведённого анализа построены двухшаговые методы Гаусса-Ньютона и Ньютона без поиска и с поиском шага. На каждой  $k$ -ой итерации метода Гаусса-Ньютона с поиском шага:

- 1) Полагается  $\lambda_k = 1$ .
- 2) Проверяется условие

$$J(x^{k-1} + \lambda_k d^{GNk}) < J(x^{k-1}),$$

где  $d^{GNk}$  - направление Гаусса-Ньютона, вычисленное в точке  $x^{k-1}$ . Если это условие выполняется, то

$$x^k = x^{k-1} + \lambda_k d^{GNk},$$

и осуществляется переход к следующей итерации, в противном случае - к пункту 3.

3) Проверяется условие убывания функции невязки при смещении переменных минимизации в два шага

$$J(x^{k-1} + \lambda_k(d^{GNk} + \tilde{d}^{GNk})) < J(x^{k-1}),$$

где  $\tilde{d}^{GNk}$  - направление Гаусса-Ньютона, вычисленное в точке  $x^{k-1} + \lambda_k d^{GNk}$ .

Если это условие выполняется, то

$$x^k = x^{k-1} + \lambda_k(d^{GNk} + \tilde{d}^{GNk}),$$

и осуществляется переход к следующей итерации, в противном случае полагается  $\lambda_k = \lambda_k / 2$  и возврат к пункту 2. Деление шага  $\lambda_k$  прекращается, если два последних вычисленных значения функции отличаются менее чем на один процент от значения  $J(x^{k-1})$ .

В двухшаговых методах Ньютона вместо отклонения Гаусса-Ньютона используется отклонение Ньютона.

Проведено сравнение двухшаговых и стандартных методов минимизации функции невязки (табл.1). Наиболее эффективным из рассмотренных методов показал себя двухшаговый метод Гаусса-Ньютона с поиском шага.

Таблица 1. Численные результаты минимизации тестовых функций.

функция	Н	НПШ	ДФП	БФГШ	ГН	ГНПШ	ЛМ1	ЛМ2	ДН	ДНПШ	ДГН	ДГНПШ
квадратичная простой структуры	1\2	1\2	4\35	4\35	1\2	1\2	14\15	1\2	1\2	1\2	1\2	1\2
Розенброка	*	21\29	23\333	20\204	*	10\33	26\31	6\64	4\7	4\7	1\3	1\3
Розенброка, модификация I	7\8	7\8	6\53	6\53	*	3\5	15\16	3\14	7\8	7\8	1\3	1\3
Розенброка, модификация II	4\5	4\5	5\41	5\40	2\3	2\3	16\17	2\3	4\5	4\5	2\3	2\3
Розенброка, модификация III	*	26\37	21\317	21\225	*	4\10	25\27	3\15	4\6	4\6	1\3	1\3
двумерная экспоненциальная	*	*	10\132	10\111	*	7\9	21\22	7\10	*	*	6\8	6\8
Биля	7\8	7\8	8\73	9\79	*	5\8	14\15	8\26	7\8	7\8	*	5\10
Зангвилла	1\2	1\2	3\20	3\29	1\2	1\2	12\13	1\2	1\2	1\2	1\2	1\2
Пауэлла	*	**	22\323	21\244	12\13	12\13	30\31	12\13	*	**	12\13	12\13

\* - нарушается условие убывания функции,

\*\* - процесс минимизации прерван по критерию медленной сходимости,

a\b : a – число итераций, b – число вычислений целевой функции.

Методы: Н - Ньютона, НПШ - Ньютона с поиском шага, ДФП - Давидона-Флетчера-Пауэлла, БФГШ - Бroyдена-Флетчера-Голдфарба-Шэнно, ГН - Гаусса-Ньютона, ГНПШ - Гаусса-Ньютона с поиском шага, ЛМ1 - Левенберга-Марквардта, вариант 1, ЛМ2 - Левенберга-Марквардта, вариант 2, ДН – двухшаговый Ньютона, ДНПШ - двухшаговый Ньютона с поиском шага, ДГН - двухшаговый Гаусса-Ньютона, ДГНПШ - двухшаговый Гаусса-Ньютона с поиском шага.

Во **втором разделе** рассматривается задача идентификации коэффициента фильтрации трёхмерного анизотропного пласта в условиях однофазной фильтрации жидкости по замерам напора в наблюдательных точках.

В **п.2.1** описывается численное решение задачи определения поля напора при заданных граничных условиях в трехмерном анизотропном пласте в условиях однофазной стационарной фильтрации жидкости, подчиняющейся линейному закону Дарси,



$$\operatorname{div}(K \operatorname{grad} h) = 0.$$

Методом конечных элементов Галёркина система дифференциальных уравнений с частными производными (уравнение фильтрации и соответствующие граничные условия) сводится к системе линейных алгебраических уравнений с симметрической разреженной матрицей системы. Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений используется метод сопряженных градиентов с предобуславливающей матрицей в виде неполного разложения Холесского.

В п.2.2 дана постановка задачи идентификации коэффициента фильтрации по замерам напора в наблюдательных точках, которая относится к классу обратных коэффициентных задач. Эта задача сводится к задаче минимизации функции невязки, представляющей собой сумму квадратов разностей между вычисленными  $h_j$  и известными значениями  $h_j^*$  напора в наблюдательных точках

$$J(K) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (h_j - h_j^*)^2,$$

где  $m$  - число наблюдательных точек. Рассмотрены методы (метод конечно-разностных соотношений, метод прямого дифференцирования и вариационный метод) для определения компонент градиента функции невязки и матрицы чувствительности, необходимых для минимизации функции невязки.

В п.2.3 определены шесть модельных задач идентификации коэффициента фильтрации. Модельные задачи различаются числом и расположением наблюдательных точек, а также граничными условиями первого рода. Область решения всех модельных задач представляет собой пятислойный пласт. Каждый слой пласта разбит на зоны однородности, которые характеризуются двумя значениями коэффициента фильтрации  $K_{xyi}^{tr}$  и  $K_{zi}^{tr}$ . Всего задана 71 зона однородности. При построении модельных задач из решения уравнения фильтрации определялись значения напора  $h_j^{tr}$  в наблюдательных точках. Далее значения  $K_{xyi}^{tr}$  и  $K_{zi}^{tr}$  считались неизвестными, и требовалось определить их по значениям напора в наблюдательных точках  $h_j^* = h_j^{tr} + \delta_j$ , где  $\delta_j$  - задаваемая погрешность. Начальные значения коэффициента фильтрации определялись при условии однородности пласта (два неизвестных значения коэффициента фильтрации).

В п.2.4 приведены результаты решения модельных задач идентификации коэффициента фильтрации без погрешности в замерах напора, полученные при минимизации функции невязки квазиньютоновскими методами (методы Гаусса-Ньютона, Давидона-Флетчера-Пауэлла, Бройдена-Флетчера-Голдфарба-Шэнно, Левенберга-Марквардта). Сложность этих задач заключается в большом числе переменных минимизации и большом числе обусловленности  $\kappa$  приближенной матрицы вторых производных функции невязки ( $10^9 < \kappa \leq 10^{16}$ ). Использование методов Гаусса-Ньютона, Давидона-Флетчера-Пауэлла, Брой-

дена-Флетчера-Голдфарба-Шэнно и второго варианта метода Левенберга-Марквардта не позволило получить решение с заданной точностью ни в одной модельной задаче. Заданная точность по напору была достигнута при использовании первого и третьего вариантов метода Левенберга-Марквардта при решении всех модельных задач, кроме третьей.

В п.2.5 рассмотрено решение модельных задач с погрешностями в замерах напора. При наличии погрешностей значения идентифицируемых параметров на первых итерациях, как правило, приближаются к своим истинным значениям, но, начиная с некоторой итерации, начинают удаляться от этих значений. Для получения значений более близких к истинным использовался критерий выбора номера итерации, с которой брались итоговые значения идентифицируемых параметров.

В третьем разделе построены двухшаговые методы Левенберга-Марквардта. В двухшаговых методах Левенберга-Марквардта проводится дополнительное смещение параметров в главной системе координат в направлениях, соответствующих большему сингулярным числам. Использование двухшаговых методов в отличие от классических методов Левенберга-Марквардта позволило достичь заданной точности при решении всех модельных задач без погрешности в замерах напора.

В п.3.1 на примере решения первой модельной задачи идентификации коэффициента фильтрации проведён анализ третьего варианта метода Левенберга-Марквардта с использованием понятия запаса чувствительности. Заданная точность по напору в наблюдательных точках в этой задаче достигается после выполнения 332-х итераций. Из рис.2 видно, что, начиная с некоторой итерации, процесс сходимости замедляется. Так, значения функции невязки на 50-ой и 51-ой итерациях соответственно равны  $1.88 \times 10^{-5}$  и  $1.83 \times 10^{-5}$  (значение параметра Марквардта на 51-ой итерации  $\mu_{51} = 4.11 \times 10^{-5}$ ). Распределение запаса чувствительности по направлениям в главной системе координат на 50-ой и 51-ой итерациях показано на рис.3.

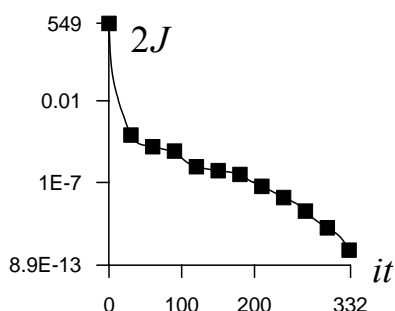


Рис.2. Значения по итерациям удвоенной функции невязки.

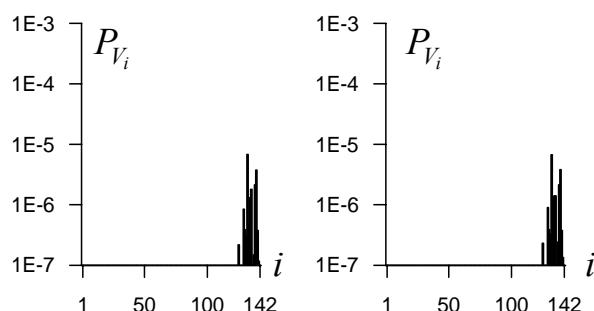


Рис.3. Распределение запаса чувствительности на 50-ой (слева) и 51-ой (справа) итерациях.

Из приведенных результатов видно, что распределение запаса чувствительности после проведения 51-ой итерации практически не меняется, причём весь запас чувствительности в основном сосредоточен на последних осях, соответствующих малым сингулярным числам. Направления минимизации в главной системе координат условно делились на две группы: направления, соответ-

вующие большим сингулярным числам (смещение ко дну оврага), и направления, соответствующие маленьким сингулярным числам (смещение вдоль дна оврага). Далее проводился анализ изменения распределения запаса чувствительности при смещении переменных минимизации на 51-ой итерации с различными значениями параметра  $\mu_{51}$  в два шага. На первом шаге переменные минимизации смещались на величину  $d^1 = -(H + \mu_{51}E)^{-1}g$  и принимали значения  $K^{50} + d^1$ . На втором шаге переменные минимизации дополнительно смещались на величину  $d^2 = V\tilde{d}_V$ , где  $\tilde{d}_V = (\tilde{d}_{V_1}, \dots, \tilde{d}_{V_n})$  - вектор смещения переменных в главной системе координат с ненулевыми компонентами в направлениях, соответствующих большим сингулярным числам матрицы  $H$ ,  $\tilde{d}_{V_i} = -g_{V_i}/(\sigma_i + \mu_{51})$ ,  $i = 1, \dots, q$ ,  $\tilde{d}_{V_i} = 0$ ,  $i = q+1, \dots, 142$ , номер оси  $q$  выбирался из условия  $\sigma_q > \mu_{51} \geq \sigma_{q+1}$ . Распределения запаса чувствительности на 51-ой итерации после первого и второго шага при различных значениях параметра  $\mu_{51}$  показаны на рис.4, 5.

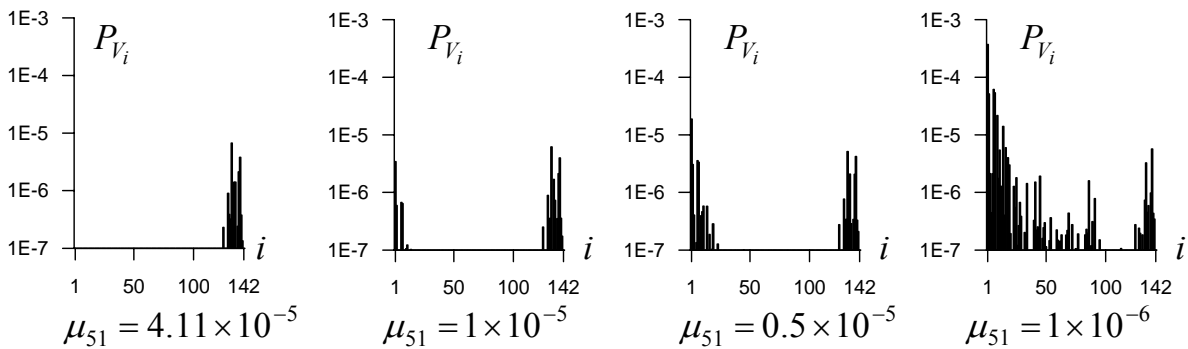


Рис.4. Распределение запаса чувствительности при различных  $\mu_{51}$  после первого шага.

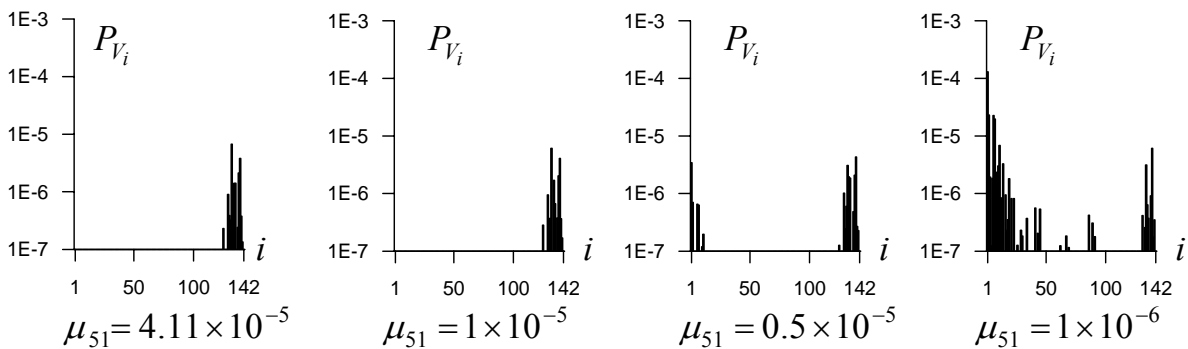


Рис.5. Распределение запаса чувствительности при различных  $\mu_{51}$  после второго шага.

При уменьшении параметра  $\mu_{51}$  запас чувствительности после первого шага растёт на осях, соответствующих большим сингулярным числам, при этом также растёт функция невязки (табл.2), а запас чувствительности на осях, соответствующих малым сингулярным числам, уменьшается. После второго шага запас чувствительности на осях, соответствующих большим сингулярным числам, и значение функции невязки уменьшаются (табл.2). В результате выполнения двух шагов при  $\mu_{51} = 10^{-5}$  получено значение функции невязки меньшее, чем при  $\mu_{51} = 4.11 \times 10^{-5}$ .

Таблица 2. Первая модельная задача идентификации коэффициента фильтрации.

$\mu_{51}$	начальное значение функции невязки	функция невязки после 1-го шага	функция невязки после 2-го шага
$4.11 \times 10^{-5}$	$1.88 \times 10^{-5}$	$1.84 \times 10^{-5}$	$1.83 \times 10^{-5}$
$1.00 \times 10^{-5}$		$2.73 \times 10^{-5}$	$1.75 \times 10^{-5}$
$0.50 \times 10^{-5}$		$4.99 \times 10^{-5}$	$2.28 \times 10^{-5}$
$1.00 \times 10^{-6}$		$6.32 \times 10^{-4}$	$2.39 \times 10^{-4}$

Таким образом, смещение переменных в два шага с увеличением функции невязки после первого шага позволило добиться большего уменьшения функции невязки по сравнению с методом Левенберга-Марквардта. С использованием этой идеи построены двухшаговые методы Левенберга-Марквардта. В двухшаговом методе Левенберга-Марквардта (с поиском параметра Марквардта по методу золотого сечения) для каждого значения  $\mu_n$  значение функции невязки  $J_{\mu_n}$  вычисляется по следующему алгоритму:

1) Вычисляется значение

$$J_{\mu_n}^1 = J(K^{n-1} + d^1),$$

где  $d^1 = -(H + \mu_n E)^{-1} g$  - вектор спуска, аналогичный вектору спуска метода Левенберга-Марквардта.

2) Вычисляется значение

$$J_{\mu_n}^2 = J(K^{n-1} + d^1 + d^2),$$

где  $d^2 = V \tilde{d}_V$  характеризует спуск ко дну оврага;  $\tilde{d}_V$  - вектор смещения переменных с компонентами  $\tilde{d}_{V_i} = -\tilde{g}_{V_i} / (\sigma_i + \mu_n)$ ,  $i = 1, \dots, q$ ,  $\tilde{d}_{V_i} = 0$ ,  $i = q + 1, \dots, n$ ;  $\tilde{g}_{V_i}$  - компоненты вектора  $\tilde{g}_V = V^T \tilde{g}$ ;  $\tilde{g} = A^T \tilde{R}$ ,  $\tilde{R}$  - вектор невязок в точке  $K^{n-1} + d^1$ ; номер оси  $q$  выбирается из условия  $\sigma_q > \mu_n \geq \sigma_{q+1}$ .

3) Определяется  $J_{\mu_n} = \min\{J_{\mu_n}^1, J_{\mu_n}^2\}$ .

Методом золотого сечения по параметру  $\mu_n$  вычисляется  $J_{\mu_n}^* = \min_{\mu_n} J_{\mu_n}$ . При переходе на следующую итерацию новые значения параметров определяются по формуле

$$K^n = \begin{cases} K^{n-1} + d^1, & \text{если } J_{\mu_n}^1 \leq J_{\mu_n}^2 \\ K^{n-1} + d^1 + d^2, & \text{если } J_{\mu_n}^1 > J_{\mu_n}^2 \end{cases},$$

где  $\mu_n^*$  значение  $\mu_n$ , при котором вычислено  $J_{\mu_n}^*$ .

Для определения вектора  $d^1$  используются значения невязок в точке  $K^{n-1}$ , а для определения вектора  $d^2$  - значения невязок в точке  $K^{n-1} + d^1$ . В обоих случаях используется матрица чувствительности  $A$ , вычисленная в точке  $K^{n-1}$ . Аналогичным образом построены двухшаговые методы Левенберга-Марквардта с другими процедурами поиска параметра Марквардта.

В п.3.2 приведены численные результаты решения модельных задач идентификации коэффициента фильтрации и минимизации тестовых функций двухшаговыми методами Левенберга-Марквардта. Проведено сравнение результатов, полученных методами Левенберга-Марквардта и двухшаговыми методами Левенберга-Марквардта. Основные вычислительные затраты при минимизации функции невязки при решении задачи идентификации коэффициента фильтрации приходятся на вычисление функции невязки и на вычисление элементов матрицы чувствительности. Для оценки этих затрат введено число  $nc = nc1 + nc2$ , где  $nc1$  – число решений уравнения фильтрации,  $nc2$  – число решений уравнений, полученных прямым дифференцированием уравнения фильтрации (используются для определения элементов матрицы чувствительности). Результаты решения первой модельной задачи методами Левенберга-Марквардта и двухшаговыми методами Левенберга-Марквардта приведены в табл.3.

Таблица 3. Первая модельная задача идентификации коэффициента фильтрации.

методы	начальное состояние		конечное состояние			
	$r_{\max}$	$\Delta \ln K_{xyz}$	$r_{\max}$	$\Delta \ln K_{xyz}$	$it$	$nc$
ЛМ1	7.18	1.7	$9 \times 10^{-7}$	0.24	248	35670
ДЛМ1			$9 \times 10^{-7}$	0.27	110	15946
ЛМ3			$1 \times 10^{-6}$	0.24	332	50700
ДЛМ3			$8 \times 10^{-7}$	0.26	82	13368

$$\Delta \ln K_{xyz} = \left( \sum_{k=1}^{71} \left( (\ln K_{xyk}^{tr} - \ln K_{xyk})^2 + (\ln K_{zk}^{tr} - \ln K_{zk})^2 \right) / 142 \right)^{1/2}$$
 - среднеквадратическое отклонение,  $r_{\max}$  - максимальная невязка,  $it$  - число итераций, ЛМ1 –метод Левенберга-Марквардта, вариант 1; ЛМ3 - метод Левенберга-Марквардта, вариант 3; ДЛМ1 – двухшаговый метод Левенберга-Марквардта, вариант 1; ДЛМ3 - двухшаговый метод Левенберга-Марквардта, вариант 3.

Аналогичные результаты получены и при решении других модельных задач. Двухшаговые методы Левенберга-Марквардта показали более высокую скорость минимизации функции невязки и потребовали меньших вычислительных затрат в задачах без погрешности и с погрешностями в замерах напора.

В п.3.3 предложена модификация двухшаговых методов Левенберга-Марквардта с дополнительными смещениями параметров вдоль направлений с большими сингулярными числами. В двухшаговых методах Левенберга-Марквардта второй шаг проводился таким образом, чтобы уменьшить запас чувствительности в направлениях, соответствующих большим сингулярным числам. На рис.6 показано распределение запаса чувствительности в главной системе координат на 15-ой итерации двухшагового метода Левенберга-Марквардта с поиском параметра Марквардта по методу золотого сечения при решении первой модельной задачи.

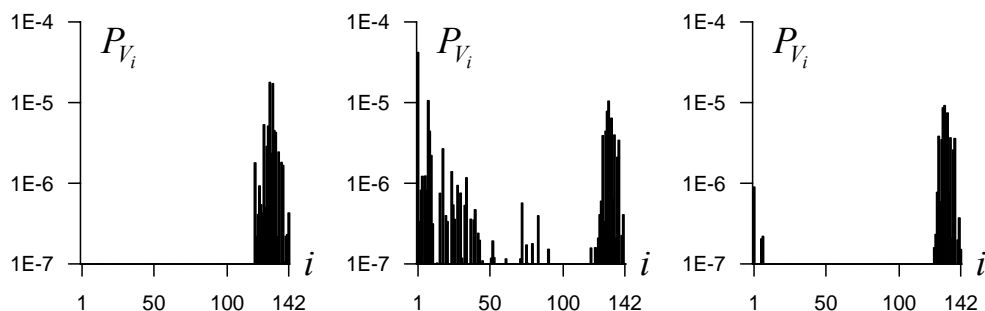


Рис.6. Распределение запаса чувствительности на 15-ой итерации при  $\mu_{15} = 1.34 \times 10^{-5}$ : в начале (слева), после первого шага (в центре) и после второго шага (справа).

Запас чувствительности на осях, соответствующих большим сингулярным числам, после второго шага уменьшился, но остался величиной большей, чем в начале итерации. После проведения дополнительных шагов, аналогичных второму шагу, запас чувствительности на осях, соответствующих большим сингулярным числам, практически полностью обнуляется. Значения функции невязки на 15-ой итерации с дополнительными шагами при различных значениях  $\mu_{15}$  приведены в табл.4.

Таблица 4. Значения функции невязки, полученные при различных значениях  $\mu_{15}$ .

$\mu_{15}$	начальное значение функции невязки	функция невязки после 1-го шага	функция невязки после 2-го шага	функция невязки после дополнительных шагов
$1.34 \times 10^{-5}$	$7.12 \times 10^{-5}$	$1.26 \times 10^{-4}$	$4.73 \times 10^{-5}$	$4.57 \times 10^{-5}$
$1.0 \times 10^{-5}$		$2.16 \times 10^{-4}$	$4.75 \times 10^{-5}$	$4.1 \times 10^{-5}$
$0.5 \times 10^{-5}$		$9.55 \times 10^{-4}$	$1.05 \times 10^{-4}$	$3.19 \times 10^{-5}$

В результате выполнения дополнительных шагов при  $\mu_{15} = 0.5 \times 10^{-5}$  получено значение функции невязки меньшее, чем при  $\mu_{15} = 1.34 \times 10^{-5}$  (значение параметра Марквардта, полученное по двухшаговому методу Левенберга-Марквардта). Распределение запаса чувствительности по отдельным шагам при  $\mu_{15} = 0.5 \times 10^{-5}$  показано на рис.7.

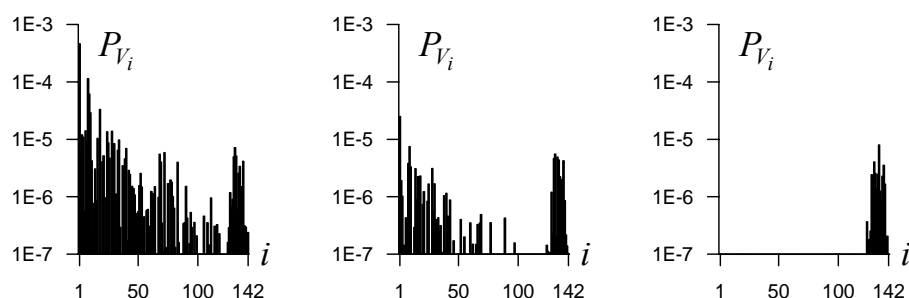


Рис.7. Распределение запаса чувствительности на 15-ой итерации при  $\mu_{15} = 0.5 \times 10^{-5}$ : после первого (слева), второго (в центре) и восьмого (справа) шагов для.

Дополнительные смещения параметров вдоль направлений, соответствующих большим сингулярным числам, привели к большему сокращению вычислительных затрат при минимизации функции невязки во всех модельных задачах без погрешности и с погрешностями в замерах напора. Результаты, полу-

ченные при решении первой модельной задачи без погрешности в замерах напора двухшаговыми методами и их модификациями, приведены в табл.5.

Таблица 5. Первая модельная задача идентификации коэффициента фильтрации.

методы	начальное состояние		конечное состояние			
	$r_{\max}$	$\Delta \ln K_{xyz}$	$r_{\max}$	$\Delta \ln K_{xyz}$	$it$	$nc$
ДЛМ1	7.18	1.7	$9 \times 10^{-7}$	0.27	110	15946
ДЛМ1М			$7 \times 10^{-7}$	0.27	59	8666
ДЛМ3			$8 \times 10^{-7}$	0.26	82	13368
ДЛМ3М			$4 \times 10^{-7}$	0.25	17	4534

ДЛМ1 – двухшаговый метод Левенберга-Марквардта, вариант 1; ДЛМ3 - двухшаговый метод Левенберга-Марквардта, вариант 3; ДЛМ1М – модифицированный двухшаговый метод Левенберга-Марквардта, вариант 1; ДЛМ3М - модифицированный двухшаговый метод Левенберга-Марквардта, вариант 3;  $r_{\max}$  - максимальная невязка,  $it$  - число итераций,  $\Delta \ln K_{xyz}$  - среднеквадратическое отклонение.

В **четвёртом разделе** для решения задачи идентификации коэффициента фильтрации предложены методы, учитывающие сравнительную априорную информацию о значениях идентифицируемых параметров. В этих методах в течение всего процесса минимизации сохраняется упорядоченность значений параметров

$$K_{xy1} \leq K_{xy2} \leq \dots \leq K_{xynz}, K_{z1} \leq K_{z2} \leq \dots \leq K_{znz}.$$

Использование методов, учитывающих сравнительную априорную информацию, позволило сократить вычислительные затраты. В задачах с погрешностями в замерах напора получены итоговые значения идентифицируемых параметров более близкие к истинным.

В **п.4.1** на основе метода Левенберга-Марквардта с поиском параметра Марквардта по методу золотого сечения построен метод, сохраняющий упорядоченность идентифицируемых параметров. В этом методе для каждого значения  $\mu_n$  формируются переменные минимизации  $x_j$ . Переменная минимизации  $x_j$  объединяет все параметры с одинаковыми значениями  $K_{j_1} = \dots = K_{j_2}$ . Значение переменной  $x_j$  совпадает со значением параметров в соответствующей ей группе  $(K_{j_1}, \dots, K_{j_2})$ . После формирования переменных  $x_j$  последовательно перебираются разбиения каждого набора  $(K_{j_1}, \dots, K_{j_2})$  на две части  $(K_{j_1}, \dots, K_{j_c})$  и  $(K_{j_c+1}, \dots, K_{j_2})$ , где  $j_1 \leq j_c < j_2$ . Каждому такому разбиению соответствует множество переменных  $\tilde{x}_j$ , число которых на единицу больше числа переменных  $x_j$ . Разбиение считается недопустимым, если любое смещение переменных минимизации  $\tilde{x}_j$  по вычисленному для них направлению спуска  $d^\mu = (d_1^\mu, \dots, d_{nx}^\mu)^T = -(H + \mu_n E)^{-1} g$  ведёт к нарушению упорядоченности параметров ( $nx$  - число переменных минимизации  $\tilde{x}_j$ ). Из всех допустимых разби-

ний выбирается разбиение с максимальным запасом чувствительности функции невязки  $\tilde{P}_{\max}$ . Если  $\tilde{P}_{\max}$  больше запаса чувствительности функции невязки для переменных  $x_j$ , то делается переход к соответствующим переменным минимизации  $\tilde{x}_j$  (число переменных минимизации увеличивается на единицу). Процедура увеличения числа переменных минимизации повторяется до тех пор, пока возрастает запас чувствительности функции невязки.

Значение функции невязки для каждого значения  $\mu_n$  вычисляется следующим образом:

1) Суммарный шаг  $\rho_s$  полагается равным нулю.

2) Вычисляется  $\tilde{\rho} = \min_j ((x_{j+1} - x_j) / (d_j^\mu - d_{j+1}^\mu))$  для  $d_j^\mu - d_{j+1}^\mu > 0$ ,  $\tilde{\rho}$  - максимальное значение шага  $\rho$ , при котором выполняется условие сохранения упорядоченности параметров  $x_j + \rho d_j^\mu \leq x_{j+1} + \rho d_{j+1}^\mu$ . Определяется шаг  $\rho^* = \min\{\tilde{\rho}, 1 - \rho_s\}$ .

3) Определяются новые значения переменных  $x_j = x_j + \rho^* d_j^\mu$ , вычисляется суммарный шаг  $\rho_s = \rho_s + \rho^*$ , и проверяется условие  $\rho_s = 1$ . При его нарушении переходим к пункту 4. В противном случае смещение переменных заканчивается, и вычисляется значение функции невязки.

4) Переменные, удовлетворяющие условию

$$x_j = x_{j+1} \text{ и } d_j^\mu > d_{j+1}^\mu, \quad (1)$$

объединяются, и проводится пересчет отклонений. Объединение переменных и пересчет отклонений для новых переменных повторяется до тех пор, пока остаются переменные, удовлетворяющие условию (1). После этого процедура повторяется, начиная с шага 2.

Аналогичным образом построен метод Гаусса-Ньютона с учетом априорной сравнительной информации.

В п.4.2 на основе третьего варианта метода Левенберга-Марквардта построен метод, сохраняющий упорядоченность идентифицируемых параметров, в котором процесс минимизации начинается с двух переменных минимизации, и затем число переменных минимизации постепенно увеличивается.

В п.4.3 с учётом априорной сравнительной информации о значениях идентифицируемых параметров построен двухшаговый метод минимизации функции невязки. Результаты, полученные при решении первой модельной задачи, приведены в табл.6. Аналогичные результаты получены при решении остальных модельных задач без погрешности и с погрешностями в замерах напора. Двухшаговый метод Левенберга-Марквардта, сохраняющий упорядоченность идентифицируемых параметров, показал себя наиболее эффективным по вычислительным затратам по сравнению со всеми рассмотренными методами.



Таблица 6. Первая модельная задача идентификации коэффициента фильтрации.

метод	начальное состояние		конечное состояние			
	$r_{\max}$	$\Delta \ln K_{xyz}$	$r_{\max}$	$\Delta \ln K_{xyz}$	$it$	$nc$
ДЛМЗ	7.18	1.7	$8 \times 10^{-7}$	0.26	82	13368
ЛМЗА			$9 \times 10^{-7}$	0.01	41	6251
ДЛМЗА			$8 \times 10^{-7}$	0.01	21	3420

ЛМЗА – метод ЛМЗ с учётом априорной сравнительной информации; ДЛМЗ – двухшаговый метод с учётом априорной сравнительной информации; ДЛМЗА - двухшаговый метод Левенберга-Марквардта, сохраняющий упорядоченность идентифицируемых параметров;  $r_{\max}$  - максимальная невязка,  $\Delta \ln K_{xyz}$  - среднеквадратическое отклонение,  $it$  - число итераций.

В **заключении** приводятся основные результаты работы.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. С использованием понятия запаса чувствительности построены новые двухшаговые методы минимизации функции невязки: Ньютона, Гаусса-Ньютона и Левенберга-Марквардта. В этих методах первый шаг каждой итерации проводится по алгоритмам классических методов, но допускается увеличение функции невязки. Итоговые же значения функции невязки на итерациях, как и в классических методах, образуют убывающую последовательность. При минимизации овражных функций проведение таких двух шагов позволяет обойти изгибы дна оврага и тем самым ускорить процесс минимизации.
2. На основе двухшаговых методов Левенберга-Марквардта разработаны вычислительные алгоритмы для решения задач идентификации коэффициента фильтрации неоднородных пластов по замерам напора в наблюдательных точках. Алгоритмы протестированы на модельных задачах идентификации коэффициента фильтрации трёхмерного пласта с учётом и без учёта априорной сравнительной информации о значениях идентифицируемых параметров. Показана более высокая эффективность по вычислительным затратам разработанных двухшаговых алгоритмов по сравнению с классическими.

## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Елесин А.В. К решению обратной задачи по определению коэффициента фильтрации трехмерного напорного пласта / А.В. Елесин, А.Н. Габидуллина, А.Ш. Кадырова // Труды математического центра им. Н.И.Лобачевского. - Казань, "Унипресс", 1998. – С. 103-105.
2. Елесин А.В. Исследование минимизационных свойств метода Марквардта при идентификации коэффициента фильтрации напорного анизотропного пласта / А.В. Елесин, А.Ш. Кадырова // Тезисы докладов IV-й научно-практической конференции молодых ученых и специалистов Республики Татарстан. - Казань, 2001. - С. 65.
3. Габидуллина А.Н. К идентификации коэффициента фильтрации трёхмерного напорного анизотропного пласта / А.Н. Габидуллина, А.В. Елесин, А.Ш. Кады-

рова, П.А. Мазуров // Математическое моделирование. -2002. – Т.14. - №9. – С. 97-102.

4. Мазуров П.А. Определение параметров водоносных пластов с использованием анализа чувствительности / П.А. Мазуров, А.В. Елесин, А.Н. Габидуллина, А.Ш. Кадырова // Современные проблемы гидрогеологии и гидромеханики. Сб. докл. конференции. - СПб., 2002. - С. 462-471.

5. Mazurov P.A. Use of minimization along the slope for estimation of aquifer parameters / P.A. Mazurov, A.V. Elesin, A.N. Gabidullina, A.Sh. Kadyirova // Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Calibration and reliability in groundwater modelling. - Prague, Czech Republic, 17-20 June 2002. -V.1. - P. 278-281.

6. Мазуров П.А. Новый метод минимизации функции невязки при идентификации параметров водоносных слоев / П.А. Мазуров, А.Н. Габидуллина, А.В. Елесин, А.Ш. Кадырова // Труды II Международной конференции "Идентификация систем и задачи управления". - Москва, 29 - 31 января 2003. - С.714-727.

7. Мазуров П.А. Запасы чувствительности в задачах идентификации коэффициента фильтрации трехмерных пластов / П.А. Мазуров, А.Н. Габидуллина, А.В. Елесин, А.Ш. Кадырова // Вычислительные методы и программирование. – 2004. – Т.5. - № 1. – С. 50-61.

8. Габидуллина А.Н. Идентификация коэффициента фильтрации с учётом сравнительной информации о значениях коэффициента фильтрации / А.Н. Габидуллина, А.В. Елесин, А.Ш. Кадырова, П.А. Мазуров // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 15-летию ИММ КазНЦ РАН. - Казань, КГУ, 2006. С. 172-178.

9. Елесин А.В. Учёт априорной сравнительной информации в задачах идентификации коэффициента фильтрации / А.В. Елесин, А.Ш. Кадырова // Вычислительные методы и программирование. – 2008. – Т.9. - № 1. – С. 14-19.

10. Елесин А.В. Двухшаговые методы Левенберга-Марквардта в задаче идентификации коэффициента фильтрации / А.В. Елесин, А.Ш. Кадырова, П.А. Мазуров // Георесурсы. – 2009. – 4(32). – С.40-42.

11. Мазуров П.А. Квазиньютоновский двухшаговый метод минимизации функции невязки / П.А. Мазуров, А.В. Елесин, А.Ш. Кадырова // Вычислительные методы и программирование. – 2009. – Т.10. - № 1. – С. 64-71.

12. Елесин А.В. Построение двухшаговых методов минимизации функции невязки / А.В. Елесин, А.Ш. Кадырова, П.А. Мазуров // Современные проблемы математического моделирования. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Сб.трудов научных молодежных школ. - Ростов-на-Дону, 2009. – с.240-247.